Variedades. Espaço Normal. Extremos condicionados

$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, C^1

$M = \{ x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0 \} \rightarrow$ Variedade

$\operatorname{car} DF(x) = m$, $\forall x \in M$.

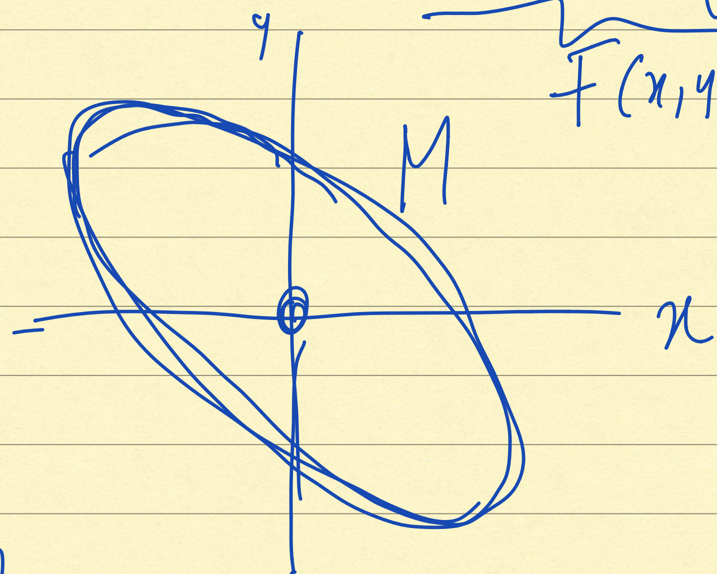
$\dim(M) = n - m$.

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \cdots & \nabla F_1(x) & \cdots \\ \cdots & \nabla F_2(x) & \cdots \\ & \cdots & \\ \cdots & \nabla F_m(x) & \cdots \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Vectores normais

$\{ \nabla F_1(x), \ldots, \nabla F_m(x) \}$ = base do espaço normal a M no ponto x

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+xy+y^2}_{F(x,y)} = 3\}$$



__problema__: determinar os pontos de M __mais afastados__ da origem.

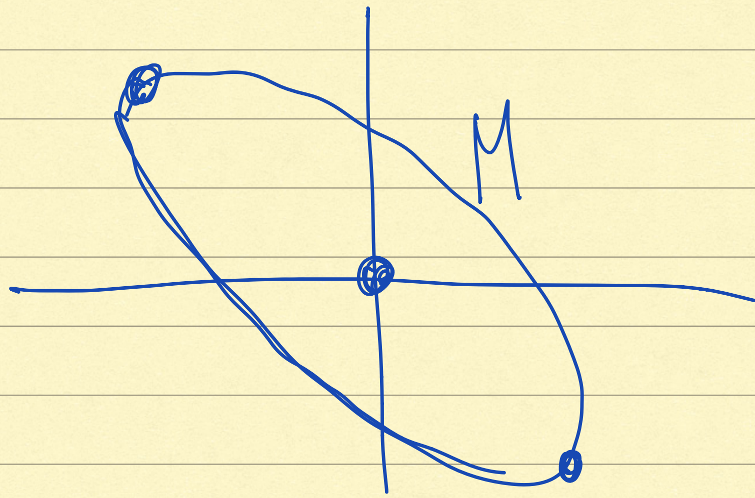
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \equiv \text{distância à origem.}$$

$\cancel{\notin C^1}$

$$\boxed{f(x,y) = x^2+y^2}\ , \quad C^1 \ ✓$$

$$\boxed{\nabla f(x,y) = (0,0)} \to \text{pontos críticos de } f$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



$(0,0) \notin M$

Este método tem de ser modificado!

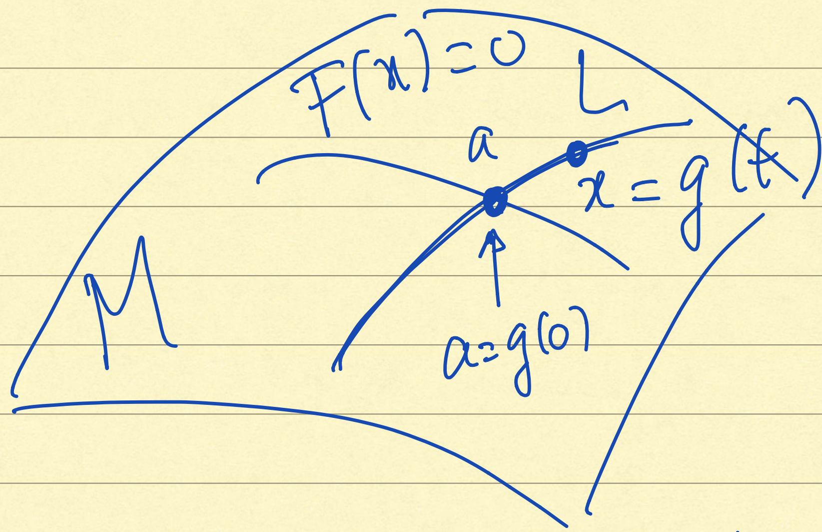
— || —

Caso geral:

Dado $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$

determinar extremos de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, C^1.

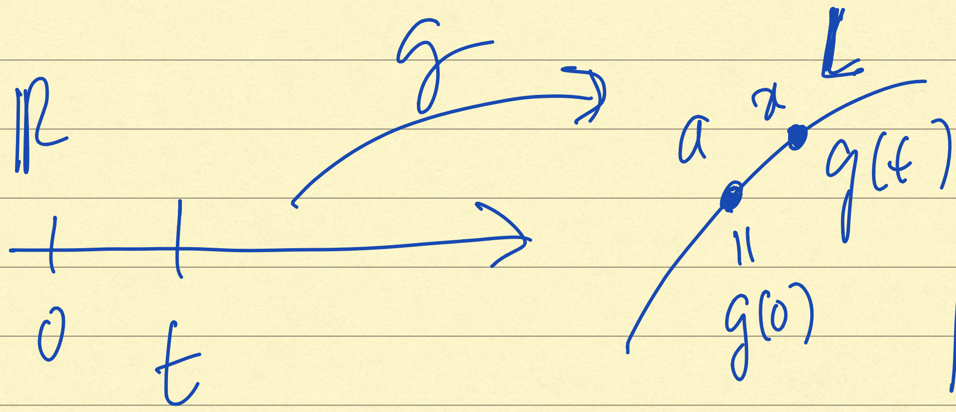


Suponhamos que f tem extremo em $a \in M$.

Suponhamos que existe uma linha $L \subset M$ tal que $a \in L$.

L = imagem de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, C^1.

$$a = g(0)$$



$\boxed{x = g(t)}$

Analisar f em $L \subset M$.

$h(t) = f(g(t))$ Composta!

$$t \longmapsto g(t) \longmapsto f(g(t))$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "h = f \circ g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, mapsto] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[d] \\
\mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1, tem extremo em $t = 0$; porque f tem extremo em $a = g(0)$.

$\Rightarrow \quad h'(0) = 0 \quad ! \qquad h(t) = f(g(t))$

$$h'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t)$$

$$h'(0) = \boxed{\nabla f(a)} \cdot \boxed{g'(0)} = 0$$

tangente !

NORMAL

$\nabla f(a)$ é um vetor normal
a M no ponto a.

$\Downarrow$

$\nabla f(a)$ é combinação linear

dos vectores da base do espaço normal a M em a:

$$\{\nabla F_1(a), \ldots, \nabla F_m(a)\}$$

n eq.

$$\begin{cases} \boxed{\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla F_1(a) + \lambda_2 \nabla F_2(a) + \ldots + \lambda_m \nabla F_m(a)} \\ \left.\begin{array}{l} F_1(a) = 0 \\ \vdots \\ F_m(a) = 0 \end{array}\right\} \quad a \in M \end{cases}$$

m eq.

Lagrange

$(a_1, \ldots, a_n)$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$

$m+n$ incógnitas, $n+m$ equações

→ Método dos multiplicadores de Lagrange.

Exemplo: determinar os pontos da linha dada por $\boxed{x^2+xy+y^2=3}$ em $\mathbb{R}^2$ mais afastados da origem.

↓ F?

↓ f?

$$F(x,y) = x^2+xy+y^2-3=0 \Rightarrow M$$

$$f(x,y) = x^2+y^2 \text{ (quadrado da distância)}$$

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla F(x,y) \\ F(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x, 2y) = \lambda (2x+y,\ 2y+x) \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x+y) \\ 2y = \lambda(2y+x) \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} \qquad \text{resolver!}$$

$$\begin{cases} a = b \\ c = d \\ \_\_\_ \end{cases} \iff \begin{cases} a \pm c = b \pm d \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y) = \lambda(2x+y+2y+x) \\ 2y = \lambda(2y+x) \\ x^2+xy+y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y) = \lambda(3x+3y) \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)\left[2-3\lambda\right] = 0 \quad !!! \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \vee \begin{cases} 2-3\lambda=0 \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ \overline{} \\ x^2 - x^2 + x^2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ \overline{} \\ x^2 = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \quad , \quad (\sqrt{3}, -\sqrt{3})}$$

candidatos a extremo!

ou

$$\begin{cases} 2 - 3\lambda = 0 \\ 2y = \lambda(2y + x) \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ 2y = \frac{2}{3}(2y + x) \\ \overline{} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{} \\ 6y = 4y + 2x \\ \overline{} \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{} \\ 2y = 2x \\ \overline{} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + x^2 + x^2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x \\ 3x^2 = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{(-1,-1)\ ,\ (1,1)}$$ Candidatos a extremo